第11章　ベクトル解析

この章で述べることはベクトル解析に関する数学のことである。この数学はあまり簡単ではないが、重力場、電磁場、流体などの場に関する理論においては必須であるので避けて通ることはできない。この章で述べる数学は、数学があまり得意でない人にとっては頭の痛い部分であろうが、なるべくわかりやすく説明したつもりである。この章で書いてあることは純粋に数学のことなのでこの知識を持っている人はこの章を読む必要はない。

11.1 スカラの勾配

第10章では空間における物体の速度の変化を空間で微分することができることを示したが、一般に空間における任意のスカラ関数$\varphi(x,y,z)$の空間による微分を考えることができる。この関数のx,y,z方向の微分は、偏微分と呼ばれ、$\varphi(x,y,z)$をφと書けば、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

と書かれる。この量をベクトル形式で書けば、そのベクトルを$\boldsymbol{A}$として、

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\mathrm{grad}\,\varphi \tag{11.1}$$

ただし、$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$はそれぞれ$x,y,z$方向の単位ベクトル

と書くことができる。$\mathrm{grad}\,\varphi$は、

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\nabla\varphi$$

と書かれることもある。∇はハミルトン演算子とよばれるもので、これを形式的なベクトル

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

と考えると、数式の表現が簡潔になるため、この演算子が用いられることも多い。

一般に空間の関数$\varphi(x, y, z) = 0$は曲面の方程式になるから、この曲面のx方向の傾きである$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$を計算するためには、基本的には$x, y, z$を設定し、どの場所かを特定しなければ具体的な傾きを知ることはできない。しかし、xを除いた$y = y_1, z = z_1$という特定の値を設定すれば、φは$\varphi(x, y_1, z_1)$となり、$\varphi(x)$と見なすことができ、xで微分することができる。この後に$x = x_1$などの数値を設定しても、その場所のx方向の傾きを求めることができる。y_1, z_1は任意の定数であるから、$\varphi(x, y, z)$をxで偏微分するには、y, zを定数と見なして計算すればよいことになる。このことはy, zに関しても同様である。

例えば、φが、

$$\varphi = xy^2 + 3zy + 2x^2 z$$

ならば、それぞれの方向の偏微分は、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2 + 4zx$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy + 3z$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 3y + 2x^2$$

として計算することができる。特定の場所のそれぞれの方向の傾きは後から数値を代入すれば求めることができる。例えば$(1, 2, 1)$の場所であれば、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 8, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 7, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 8$$

である。このときの$\nabla\varphi$は、

$$\nabla\varphi = 8\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

であるから、空間におけるこのベクトルの方向と大きさを知ることができる。

11.2 間接関数の微分

関数$u = f(x, y)$において、x, yが独立変数tに従属しているものとする。すなわち、x, yは独立変数ではなく、独立変数tの関数で、$x = g(t), y = h(t)$であるとする。このとき、$\frac{du}{dt}$は、

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{11.2}$$

と書くことができる。この定理は合成関数の微分としてよく知られているものである。

次に、変数xが独立変数tの役割をするような特別な場合について考える。関数$u = f(x, y)$が独立変数xに直接に従属し、かつ、xの関数である変数yにも間接に従属しているものとし、関数関係$y = g(x)$があるとする。式(11.2)のdtの代わりにdxで書けば、

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{11.3}$$

が成り立つ。同様に、三次元の関数$v = f(x,y,z)$において、$z = g(x,y)$のとき、$\frac{\partial v}{\partial x}$は、

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \tag{11.4}$$

が成り立つ。

11.3 重積分

平面領域Sにスカラ点関数が$\rho(x,y)$の密度で物質が分布しているとする。この領域Sをn個の部分に分割すれば、領域Sの全面積は、微少領域$DxDy$の和であるから、Sの面積は、

$$S = Dx_1Dy_1 + Dx_2Dy_2 + ... + Dx_nDy_n$$

と書くことができる。

領域S内のそれぞれの場所の密度を$\rho(x_1,y_1), \rho(x_2,y_2)...$などとし、全物質量を$M$とすれば、密度×微少領域の面積＝微少領域の物質量であるから、

$$M \approx \rho(x_1,y_1)Dx_1Dy_1 + \rho(x_2,y_2)Dx_2Dy_2 + ... + \rho(x_n,y_n)Dx_nDy_n$$

と書くことができる。分割の個数を上げ、微少領域の面積を小さくしていけば、精確にMを求めることができる。すなわち、

$$M = \lim_{n\to\infty}[\rho(x_1,y_1)Dx_1Dy_1 + \rho(x_2,y_2)Dx_2Dy_2 + ... + \rho(x_n,y_n)Dx_nDy_n]$$

である。このような計算はいわゆる積分で、領域Sに関して、

$$M = \int\int_S \rho(x,y)dxdy = \int_S \rho(x,y)dS \qquad (11.5)$$

と書かれる。$DxDy$は微少領域の面積としての一つの変数DSとして考えてきたが、Dx, Dyを別の変数と考えるとこの積分は２変数による積分である。このように２変数以上の積分を重積分という。

　次にこの重積分の計算方法について考えよう。平面領域Sをx, y座標上に書けば、図11.1(1)のように書くことができる。

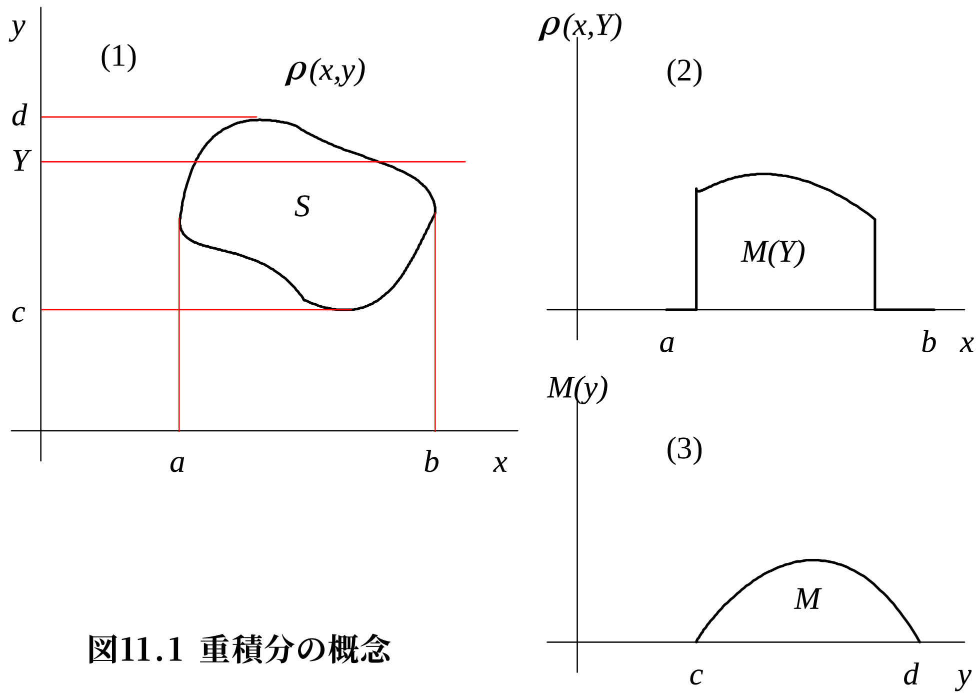

図11.1 重積分の概念

　この領域Sを$y = Y$ (一定)として切り取った領域の密度は、$\rho(x, Y)$である。この密度は、xの値によって変化し、そのグラフは図

11.1(2)のように書くことができる。この$\rho(x,Y)$をxで積分すれば、その量は$y=Y$の物質量$M(Y)$である。すなわち、

$$M(Y)=\int_a^b \rho(x,Y)dx \tag{11.6}$$

である。Yはcからdまでの任意のyであるから、$M(Y)$を$M(y)$と書き、そのグラフを書けば、図11.1(3)のように書くことができる。この$M(y)$をyで積分すれば、その量は全物質量Mである。すなわち、

$$M=\int_c^d M(y)dy \tag{11.7}$$

である。式(11.7)に式(11.6)を代入すれば、

$$M=\int_c^d \int_a^b \rho(x,y)dxdy$$

となり、この式は式(11.5)と等しいから、

$$\int\int_S \rho(x,y)dxdy=\int_c^d \int_a^b \rho(x,y)dxdy \tag{11.8}$$

と書くことができ、２重積分の計算は単積分を２回繰り返せばよいことになる。その際に、$\rho(x,y)$をxで積分するときは、偏微分のときと同じように$y=$定数と見なして計算すればよい。

このことは空間領域の積分である３重積分にも拡張することができる。例えば、立体領域vに密度$\sigma(x,y,z)$で物質が分布しているとする。このvを$z=Z$(一定)として、vを切り取れば、その切断面は平面領域Sであり、その平面領域の密度は$\sigma(x,y,Z)$であり、平面領域の密

度$\rho(x,y)$であると見なすことができる。それ以降は２重積分の場合と同様であるから、３重積分は、

$$\int\int\int_v \sigma(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \sigma(x,y,z)dxdydz \qquad (11.9)$$

のように計算することができる。また、$dxdydz$ を極少立体領域の体積である一つの変数dvであると考えることも２重積分と同様に可能であり、

$$\int\int\int_v \sigma(x,y,z)dxdydz = \int_v \sigma(x,y,z)dv \qquad (11.10)$$

と書かれることもある。

11.4 線積分

物理学では、力の方向とその変位の方向が一致する場合には、[一定の大きさの力]×[力による変位の距離]という量は仕事という量として定義されている。すなわち、

$$W = F \times s \qquad (11.11)$$

ただし、W;仕事、F;力、s;距離

である。この仕事という量は、一般的に使われる仕事という単語の意味とはまったく異なっており、このような量に対して、仕事とよぶのはあまり適切ではないと思われるが、物理学ではそうよばれている。物理学でいう仕事とは力×距離のことである。このような量のことを仕事とよぶか、あるいは他の名でよぶかに拘わらず、このような量を定義することには意味があるだろう。

距離sは幾つかのより小さい距離に分割できるから、微少距離をDsとし、n個の区間に分割すると、

$$s = Ds_1 + Ds_2 + ... + Ds_n$$

と書くことができる。これを式(11.11)に代入すれば、

$$\begin{aligned} W &= F \times (Ds_1 + Ds_2 + ... + Ds_n) \\ &= F \times Ds_1 + F \times Ds_2 + ... + F \times Ds_n \end{aligned}$$

と書くことができる。微少仕事$F \times Ds_1$をDW_1などとかけば、

$$W = DW_1 + DW_2 + ... + DW_n \qquad (11.12)$$

と書くことができ、全体の仕事Wは微少な仕事$DW_1, DW_2 ...$の和として表現することができる。

力の大きさと方向が一定でなく、力の方向と変位の方向が一致しない一般的な場合の仕事の表現はどのようにすればよいのだろうか。点と見なせる物体の運動は一般に空間上に曲線の軌跡を描く。この曲線上の各所における接線の方向は、物体の変位の方向に等しく、この方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{n}$と書くことにし、力は変数としてのベクトル$\boldsymbol{F}$で書くことにする。この曲線上の1点Pにおける力を$\boldsymbol{F}_p$、接線方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{n}_p$とすれば、$\boldsymbol{F}_p$と$\boldsymbol{n}_p$の内積は、$\boldsymbol{F}_p$の運動方向の成分である。すなわち、

$$\boldsymbol{F}_p\text{の運動方向成分} = \boldsymbol{F}_p \cdot \boldsymbol{n}_p$$

である(図11.2)。

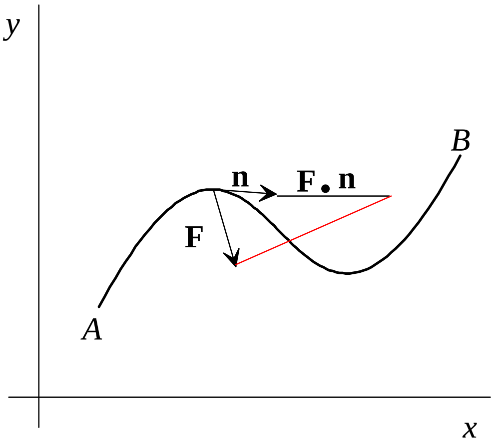

図11.2 ベクトルの接線方向成分

ベクトル$\boldsymbol{n}$と同じ方向にとった微少な長さをDsとすれば、$\boldsymbol{F}_p$の運動方向成分とDsは同一直線上にあり、$\boldsymbol{F}_p$の運動方向成分とDsの積は、$\boldsymbol{F}_p$は局所的に一定であると見なせるから、式(11.11)の関係を使うことができる。すなわち、P点における局所的な仕事DW_pは、

$$DW_p = \boldsymbol{F}_p \cdot \boldsymbol{n}_p Ds_p \tag{11.13}$$

と書くことができる。

いま、曲線上の点Aから点Bまでの仕事W_{AB}を求めたいとする。この区間をm個に分割し、それぞれを式(11.13)の形式で書けば、

$$DW_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 Ds_1$$
$$DW_2 = \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 Ds_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$DW_m = \boldsymbol{F}_m \cdot \boldsymbol{n}_m Ds_m$$

である。近似的に仕事W_{AB}はこれらの和であり、

$$
\begin{aligned}
W_{AB} &\approx DW_1 + DW_2 + ... + DW_m \\
&\approx \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 Ds_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 Ds_2 + ... + \boldsymbol{F}_m \cdot \boldsymbol{n}_m Ds_m
\end{aligned}
$$

と書くことができる。$DW_1, DW_2 ...$は階段状に変化するもので、厳密にW_{AB}を求めるには、$m \to \infty$の極限とすればよい。すなわち、

$$
\begin{aligned}
W_{AB} &= \lim_{m\to\infty}(DW_1 + DW_2 + ... + DW_m) \\
&= \lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 Ds_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 Ds_2 + ... + \boldsymbol{F}_m \cdot \boldsymbol{n}_m Ds_m)
\end{aligned}
\tag{11.14}
$$

である。このような計算は線積分とよばれ、

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{11.15}$$

と書かれる。この式はまた、

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{11.16}$$

と書かれることもある。今まで、$\boldsymbol{F}$は力というベクトルで考えてきたが、数学的に式(11.16)のような表現は任意のベクトルにおいて可能である。

経路が閉曲線cの場合は、

$$W_c = \oint_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{11.17}$$

のように書かれることもある。

また、極少なベクトル$d\boldsymbol{s}$は、

$$ds = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$$

と書くことができるから、式(11.16)は、

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}) \cdot (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}) \\ &= \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \end{aligned} \tag{11.18}$$

と書くことができる。$A(A_x, A_y, A_z), B(B_x, B_y, B_z)$ とすれば、式(11.18)は、

$$W_{AB} = \int_{A_x}^{B_x} F_x dx + \int_{A_y}^{B_y} F_y dy + \int_{A_z}^{B_z} F_z dz \tag{11.19}$$

と書くことができ、右辺の各項は普通の定積分であり、各方向の成分を個別に計算すれば全体の仕事W_{AB}を求めることができる。このことから明らかなように、線積分では、定積分の公式が成り立つ。

しばしば、仕事という量とエネルギーという量は混同されがちであるが、第８章でも指摘したように、仕事という量は物体が動かないと常にゼロになるが、力が加えられても物体が動かないことはあり、このような場合でもエネルギーは必要なのである。したがって、仕事という量がゼロだからといって、そこに加えられたエネルギーはゼロであると結論することはできない。仕事という量は力の方向によって正にも負にもなるが、仕事という量は、

$$\boldsymbol{F} + (-\boldsymbol{F}) = 0$$

と見なせる場合において成立する量である。物理量には、

$$|\boldsymbol{F}| + |-\boldsymbol{F}| = 2F$$

という量も存在することを忘れてはならない。

11.5 面積分

平面の面積がDSで、方向をこの面に垂直にとった単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$との積である面積ベクトル$DS\boldsymbol{n} = D\boldsymbol{S}$について考える。ベクトルの演算にはスカラの積と内積、外積の３種類があるから、このベクトルに関して、任意のスカラ関数φとの積と、任意の関数ベクトル$\boldsymbol{A}$との内積、外積を考えることができる。すなわち、

$$\varphi D\boldsymbol{S} \tag{11.20}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot D\boldsymbol{S}$$
$$\boldsymbol{A} \times D\boldsymbol{S}$$

という量を考えることができる。

曲面Sがあるとき、この曲面を微少な曲面DSに分割することができ、分割の個数をm個とすれば、全体の面積Sは、

$$S = DS_1 + DS_2 + ... + DS_m$$

と書くことができる。この右辺の各項に関して、分割の個数が十分大きければ、個々の微少な曲面は平面と見なすことができるから、面積ベクトルDSを考えることができ、その和は、

$$DS\boldsymbol{n}_1 + DS\boldsymbol{n}_2 + ... + DS\boldsymbol{n}_m = D\boldsymbol{S}_1 + D\boldsymbol{S}_2 + ... + D\boldsymbol{S}_m$$

である。この和は曲面Sの微少面における面積ベクトルの和であるが、全体の面積Sについての面積ベクトル$\boldsymbol{S}$であると見なすことはできない。面積ベクトルが定義できるのは平面に限られるからである。この微少面における面積ベクトルの和のベクトルを$\boldsymbol{S}'$とおけば、近似的に、

$$\boldsymbol{S}' \approx D\boldsymbol{S}_1 + D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + D\boldsymbol{S}_m$$

と書くことができる。分割の個数を上げていけば、近似の精度はいくらでも上げることができ、$m \to \infty$とした極限において、$\boldsymbol{S}'$は精確にSの個々の面積ベクトルの和であると見なすことができる。すなわち、

$$\boldsymbol{S}' = \lim_{m\to\infty}(D\boldsymbol{S}_1 + D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + D\boldsymbol{S}_m)$$

である。この式の右辺に式(11.20)のような量を当てはめると、それぞれの場所のφを
φ_1, φ_2、ベクトル$\boldsymbol{A}$を$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$などと書けば、

$$\lim_{m\to\infty}(\varphi_1 D\boldsymbol{S}_1 + \varphi_2 D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + \varphi_m D\boldsymbol{S}_m)$$

$$\lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{A}_1 \cdot D\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{A}_2 \cdot D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_m \cdot D\boldsymbol{S}_m)$$

$$\lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{A}_1 \times D\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{A}_2 \times D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_m \times D\boldsymbol{S}_m)$$

である。このような計算は面積分とよばれ、それぞれ、

$$\int_S \varphi d\boldsymbol{S} = \lim_{m\to\infty}(\varphi_1 D\boldsymbol{S}_1 + \varphi_2 D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + \varphi_m D\boldsymbol{S}_m) \qquad (11.21)$$

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{A}_1 \cdot D\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{A}_2 \cdot D\boldsymbol{S}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_m \cdot D\boldsymbol{S}_m) \qquad (11.22)$$

$$\int_S \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S} = \lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{A}_1\times D\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{A}_2\times D\boldsymbol{S}_2+\ldots+\boldsymbol{A}_m\times D\boldsymbol{S}_m) \qquad (11.23)$$

と書かれる。普通、面積分は式(11.22)のことをさすが、式(11.21)や式(11.23)も面積分の一種である。

閉曲面上での面積分はそれぞれ、

$$\oint_S \varphi d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S}$$

と書かかれることもあり、単位法線ベクトルの方向は外向きと定められている。

単位法線ベクトルは、式(6.8)で述べたように、

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos(n,x)+\boldsymbol{j}\cos(n,y)+\boldsymbol{k}\cos(n,z)$$

と書くことができ、$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ であるから、式(11.22)は、

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_S (A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}\cos(n,x)+\boldsymbol{j}\cos(n,y)+\boldsymbol{k}\cos(n,z))dS \\ &= \int_S (A_x\cos(n,x)+A_y\cos(n,y)+A_z\cos(n,z))dS \qquad (11.24)\end{aligned}$$

と書くこともできる。

極少平面の面積dSのx,y平面への射影の面積$dxdy$は、その面となす角(n,z)により変化する。(図11.3)

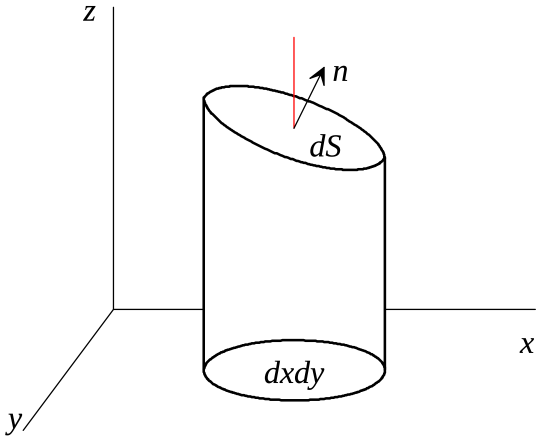

図11.3　平面 dS の x,y 平面への射影

それらの間には、

$$dS\cos(n,z)=dxdy$$

の関係があり、$dydz, dzdx$ 面についても同様に、

$$dS\cos(n,x)=dydz$$
$$dS\cos(n,y)=dzdx$$

の関係があるから、これを式(11.24)に代入すれば、

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_S \left(A_x\frac{dydz}{dS}+A_y\frac{dzdx}{dS}+A_z\frac{dxdy}{dS}\right)dS \\ &= \int\int_S (A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy)\end{aligned} \tag{11.25}$$

と書くこともできる。

式(11.25)の物理的な意味は、曲面 S を通るベクトル A の総量ということである。

11.6 ガウスの発散定理

閉曲面Sで囲まれた領域をvとし、この領域vで連続な関数$r(x,y,z)$があり、この関数は、$\frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}$ を持つものとする。簡単化のために、閉曲面Sはz軸に平行な直線と２点でしか交わらないと仮定し、x,yを与えたときの閉曲面Sとの交点をz_1,z_2、大小関係を$z_1<z_2$とすれば、この関数$\frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}$の領域$v$での３重積分は、

$$\begin{aligned}\int_v \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z} dv &= \int\int\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z} dzdxdy \\ &= \int\int_{S_{xy}} [r(x,y,z_2) - r(x,y,z_1)]dxdy \\ &= \int\int_{S_{xy}} r(x,y,z_2)dxdy - \int\int_{S_{xy}} r(x,y,z_1)dxdy\end{aligned}$$

である(図11.4)。

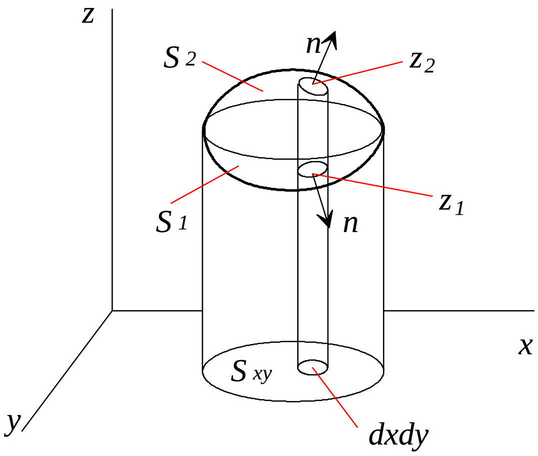

図11.4 ガウスの発散定理

曲面S上の極少曲面の面積をdS、この面のx,y平面への射影の面積を$dxdy$とすれば、曲面S上の法線nとz軸とのなす角を用いれば、

曲面Sとz_2の交点上において；　$dS\cos(n,z)=dxdy$

曲面Sとz_1の交点上において；　$-dS\cos(n,z)=dxdy$

の関係があるから、

$$\int_v \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}dv=\int_{S_2} r(x,y,z_2)\cos(n,z)dS+\int_{S_1} r(x,y,z_1)\cos(n,z)dS$$

ただし、S_2は曲面Sとz_2が交わる面、

S_1は曲面Sとz_1が交わる面

と書くことができる。z_1, z_2はzの値域であり、この式では、その積分領域が明示されているから、z_1, z_2はzと書くことができ、

$$\int_v \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}dv=\int_{S_2} r(x,y,z)\cos(n,z)dS+\int_{S_1} r(x,y,z)\cos(n,z)dS$$

である。この式の右辺は曲面S_1上での積分とS_2上での積分の和であるから、全曲面S上の積分を表す。したがって、

$$\int_v \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}dv=\int_S r(x,y,z)\cos(n,z)dS$$

となる。

同様に、別の関数$p(x,y,z), q(x,y,z)$を考えれば、

$$\int_v \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}dv=\int_S p(x,y,z)\cos(n,x)dS$$
$$\int_v \frac{\partial q(x,y,z)}{\partial y}dv=\int_S q(x,y,z)\cos(n,y)dS$$

が得られる。これらを辺々加えれば、

$$\int_v \left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)dv=\int_S [p\cos(n,x)+q\cos(n,y)+r\cos(n,z)]dS$$

が得られる。この公式は、ガウスの発散定理とよばれているものである。

この式を式(11.25)のような形に書けば、

$$\int_v \left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)dv=\int\int_S (pdydz+qdzdx+rdxdy)$$

と書くこともできる。

p,q,r がベクトル $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ の成分に等しく、$p=A_x$,$q=A_y$,$r=A_z$ とすれば、

$$\int_v \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dv=\int\int_S (A_x dydz+A_y dzdx+A_z dxdy) \tag{11.26}$$

と書くことができる。この式の右辺は式(11.25)に等しいから、

$$\int_v \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}dv=\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{11.27}$$

ただし、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

と書くことができる。この式がガウスの発散定理のベクトル形式の表現である。

11.7 ベクトルの発散

一般にベクトル関数$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ とするとき、

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

のことを$\boldsymbol{A}$の発散といい、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$で表す。これはスカラーである。

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$をハミルトン演算子$\nabla$を用いて書けば、

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (11.28)$$

となる。式(11.27)を別の形に書けば、

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta v} \qquad (11.29)$$

となる。この方程式が発散の定義ということになる。

ベクトル場において、発散が0でないところを涌点という。ベクトル場$\boldsymbol{A}$の涌点を含む閉曲面をSとし、その面に囲まれた領域vに関する体積積分

$$\int_v \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} dv$$

を涌点の強さという。ガウスの発散定理によれば、これはS上の面積分

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

に等しい。この面積分は曲面Sから外に出る流線の数を表しており、この流線の数と涌点の強さは比例する。$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$は単位体積当たりの涌点の強さであり、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$が大きいほど、その周りの曲面$S$から外に出る流線の数も大きくなり、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$であれば、外に出る流線の数もゼロである。このことは例えば水などの流体が涌き出ている場

合、その水の速度ベクトルを$\boldsymbol{v}$とすれば、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \neq 0$であり、涌き出ていない場合は、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$である。一般的に流れの発生や消滅のないところでは発散はゼロになる。

11.8 曲面の法線と方向余弦の関係

曲面Sの方程式が、$z = f(x, y)$のとき、曲面S上の点(x, y, z)における法線nとx, y, z軸との方向余弦との関係は、解析幾何学の知識によれば、

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}$$
$$\cos(n, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}} \qquad (11.30)$$
$$\cos(n, z) = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}$$

と表すことができる。
これらの式より、

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(n, z) = -\cos(n, x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n, z) = -\cos(n, y) \qquad (11.31)$$

と書くことができる。

11.9 平面におけるグリーンの定理

閉曲線がcの平面領域Sにおいて連続な関数$p(x, y)$があるとし、この関数は連続な導関数$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}$を持っているとする。領域$S$の閉曲線$c$

がy軸と平行な直線と２点でしか交わらないと仮定し、yについて領域Sについての２重積分をすれば、

$$\int_S \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} dS = \int\int_S \frac{\partial p}{\partial y} dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial p}{\partial y} dydx$$
$$= \int_a^b [p(x,y_2) - p(x,y_1)]dx = \int_a^b p(x,y_2)dx - \int_a^b p(x,y_1)dx$$

となる(図11.5)。

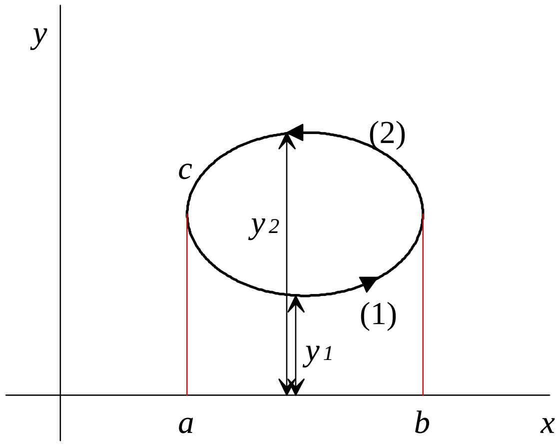

図11.5 グリーンの定理

この式の右辺は$x = a$からbまでの線積分である。この式の右辺は、

$$\int_a^b p(x,y_2)dx = -\int_b^a p(x,y_2)dx = -\int_{(2)} p(x,y)dx$$
$$-\int_a^b p(x,y_1)dx = -\int_{(1)} p(x,y)dx$$

であるから、

$$\int_S \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} dS = -\int_{(2)} p(x,y)dx - \int_{(1)} p(x,y)dx = -\int_c p(x,y)dx \quad \textbf{(11.32)}$$

同様に別の関数$q(x,y)$について計算すれば、

$$\int_S \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} dS = \int_c q(x,y)dy \qquad (11.33)$$

が得られる。式(11.32)と式(11.33)の符号が逆になっているのは、線積分の方向を図のように時計と反対方向にとると、x軸に関しては、yがより小さい経路(1)において、xの増加方向と線積分の方向が同じなのに対し、y軸では逆になっているからである。式(11.33)から式(11.32)を引けば、

$$\int_S \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dS = \int_c (pdx + qdy) \qquad (11.34)$$

が得られる。この式が平面におけるグリーンの定理である。

11.10 ストークスの定理

閉曲線cを持つ任意の閉じていない曲面Sにグリーンの定理を拡張しよう。z軸に平行な直線が曲面Sと１つの点でしか交わらないと仮定し、曲面Sの近傍で定義される連続な関数を$p(x,y,z)$とし、連続な導関数$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}$を持つとする。このとき、$p(x,y,z)$の線積分、

$$\int_c p(x,y,z)dx$$

を考えよう。曲線cは曲面Sの上にあり、この曲面の方程式を$z=f(x,y)$とすれば、関数pは、$p(x,y,f(x,y))$と書くことができるから、

$$\int_c p(x,y,z)dx = \int_l p(x,y,f(x,y))dx$$

である。ここで、lは曲線cのxy平面への射影である。この式の右辺は平面領域であるから、グリーンの定理を適用すると、式(11.32)より、

$$\int_c p(x,y,z)dx = -\int_{S_{xy}} \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} dS_{xy} \tag{11.35}$$

である(図11.6)。

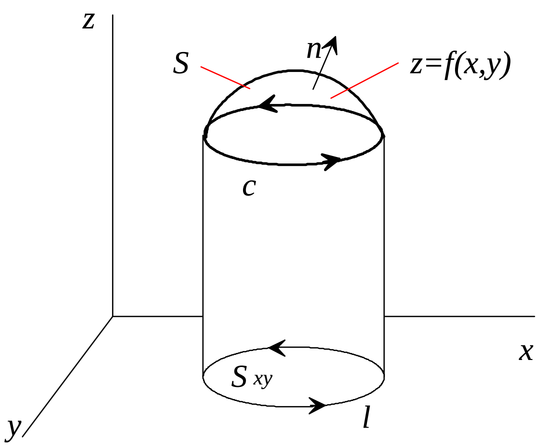

図11.6 ストークスの定理

ここで、S_{xy}は曲面Sのxy平面への射影である。$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}$の計算は、間接関数の微分公式(11.4)より、

$$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

であるから、式(11.35)は、

$$\int_c p(x,y,z)dx = -\int_{S_{xy}}[\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}]dS_{xy} \qquad (11.36)$$

となる。dS と dS_{xy} の間には、曲面の法線 n と z 軸とのなす角を用いて、

$$dS_{xy} = \cos(n,z)dS$$

の関係があるから、式(11.36)の右辺は、

$$-\int_{S_{xy}}[\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}]dS_{xy}$$
$$= -\int_S[\frac{\partial p}{\partial y}\cos(n,z) + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos(n,z)]dS$$

となる。さらにこの項は、式(11.31)より、

$$= \int_S[\frac{\partial p}{\partial z}\cos(n,y) - \frac{\partial p}{\partial y}\cos(n,z)]dS$$

となる。したがって、

$$\int_c p(x,y,z)dx = \int_S[\frac{\partial p}{\partial z}\cos(n,y) - \frac{\partial p}{\partial y}\cos(n,z)]dS \qquad (11.37)$$

を得る。

同様に、別の関数 $q(x,y,z), r(x,y,z)$ に関して、

$$\int_c q(x,y,z)dy = \int_S[\frac{\partial q}{\partial x}\cos(n,z) - \frac{\partial q}{\partial z}\cos(n,x)]dS$$
$$\int_c r(x,y,z)dz = \int_S[\frac{\partial r}{\partial y}\cos(n,x) - \frac{\partial r}{\partial x}\cos(n,y)]dS$$

を得ることができる。

得られた３つの式を加えれば、

$$\int_c (pdx + qdy + rdz) = \int_S [(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z})\cos(n,x)$$
$$+(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x})\cos(n,y) + (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})\cos(n,z)]dS \qquad (11.38)$$

となる。この公式をストークスの定理という。

p, q, r がベクトル$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$の成分に等しく、
$p = A_x$, $q = A_y$, $r = A_z$ とすれば、式(11.38)は、

$$\int_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_S [(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\cos(n,x)$$
$$+(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\cos(n,y) + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\cos(n,z)]dS \qquad (11.39)$$

と書くことができる。この式の左辺は式(11.18)の形式であるからベクトルの線積分で、

$$\int_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$

と書くことができ、式(11.39)の右辺は、式(11.24)の形式であるからベクトルの面積分で、

式(11.39)の右辺$= \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$

ただし、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{k}$

と書くことができる。したがって、ストークスの定理のベクトルによる表現は、

$$\int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (11.40)$$

となる。

11.11 ベクトルの回転

一般にベクトル関数$\boldsymbol{A}$を$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$とするとき、

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

を成分とするベクトルを$\boldsymbol{A}$の回転といい、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$で表す。これはベクトルである。すなわち、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$を$x,y,z$座標を用いて表せば、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (11.41)$$

である。$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$は$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$と書かれることもある。また、ハミルトン演算子を用いて書けば、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (11.42)$$

とも書かれる。式(11.40)を別の形に書けば、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}}{\Delta S} \qquad (11.43)$$

となる。この方程式が回転の定義である。

ベクトル場において回転がゼロでないところは、渦があるという。ベクトル場$\boldsymbol{A}$において、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$の発散である$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_x + \tfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_y + \tfrac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_z \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x}(\tfrac{\partial A_z}{\partial y} - \tfrac{\partial A_y}{\partial z}) + \tfrac{\partial}{\partial y}(\tfrac{\partial A_x}{\partial z} - \tfrac{\partial A_z}{\partial x}) + \tfrac{\partial}{\partial z}(\tfrac{\partial A_y}{\partial x} - \tfrac{\partial A_x}{\partial y}) \\
&= \tfrac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \tfrac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \tfrac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \tfrac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \tfrac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \tfrac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり、常にゼロになるから、$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ の流線は涌口がないもので、閉路を形成し、環状になる。

渦のあるところに閉曲線cを周囲とする曲面Sの上での面積分、

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

は曲線cに囲まれた渦の強さといい、ストークスの定理によれば、cに関する線積分

$$\int_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$

に等しい。式(11.43)からも明らかなように、$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0$ になるためには、この線積分がゼロにならねばならない。逆に言えば、$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \neq 0$ であるためには、この線積分がゼロであってはならない。１周回った積分がゼロにならないためには、そのベクトル場は渦を持っていなければならない。

11.12 ベクトルの公式

kを定数、$\boldsymbol{C}$を定ベクトル、φ, ρをスカラー関数、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$をベクトル関数とするとき、次の公式が成り立つ。

$$\mathrm{grad}\, k = 0 \tag{11.44}$$

$$\mathrm{grad}\, k\varphi = k\, \mathrm{grad}\, \varphi \tag{11.45}$$

$$\mathrm{grad}(\varphi + \rho) = \mathrm{grad}\, \varphi + \mathrm{grad}\, \rho \tag{11.46}$$

$$\mathrm{grad}\, \varphi\rho = \nabla(\varphi\rho) = \rho\nabla\varphi + \varphi\nabla\rho \tag{11.47}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{C} = 0 \tag{11.48}$$

$$\mathrm{div}\, k\boldsymbol{A} = k\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{A} \tag{11.49}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{div}\, \boldsymbol{A} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{B} \tag{11.50}$$

$$\mathrm{div}\, \varphi\boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{A}) = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{A} + \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{11.51}$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{C} = 0 \tag{11.52}$$

$$\mathrm{rot}\, k\boldsymbol{A} = k\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \tag{11.53}$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} \tag{11.54}$$

$$\mathrm{rot}\, \varphi\boldsymbol{A} = \nabla \times (\varphi\boldsymbol{A}) = \nabla\varphi \times \boldsymbol{A} + \varphi\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{11.55}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\, \varphi = \nabla \times \nabla\varphi = 0 \tag{11.56}$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = 0 \tag{11.57}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{11.58}$$

また、次の定理も成り立つ。

$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = 0$　のとき、 (11.59)

$\boldsymbol{A} = \nabla\varphi$　となるφが存在する。

$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$　のとき、 (11.60)

$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{D}$　となるベクトル$\boldsymbol{D}$が存在する。