

第10章 力の表現

～ 加速度の時間微分と空間微分による力の表現 ～

加速度という量は、速度の時間微分であると考えるのが一般的であるが、他の形式で加速度という量を定義する方法はないのであろうか。時間に対する速度の変化の他に、空間に対する速度の変化という量もあるはずである。

この章では、ニュートンの運動の第二法則と等価な別形式の表現法則を発見することにしよう。この法則は、加速度という量を空間上の位置の関数として定義できる点で、ニュートンの運動の第二法則より優れている。また、この法則により、重力加速度といった空間上の位置に依存する加速度と時間微分の加速度を何故等しいと置くことができるのか、といった疑問に答えることができるだろう。

10.1 時間微分による加速度の測定

一般的に加速度の表現方法は、速度の時間微分で与えられる。このように定める加速度を後に発見する別の加速度と区別する意味で時間加速度とよぶことにしよう。この方法の速度と時間の関係の幾何学的表現は、速度の変化が直線上を運動するような一次元の運動とすれば、二本の軸を直交させ、一方の軸を速度とし、もう一方の軸を時間として表現することができる。一般的な測定方法は、適当な時間間隔ごとに物体の速度を計測していき、その結果を表にまとめ、図に点を記入していく。測定の時間間隔を短くすれば、点と点はほとんどつながり曲線状に表現されることになる(図10.1)。

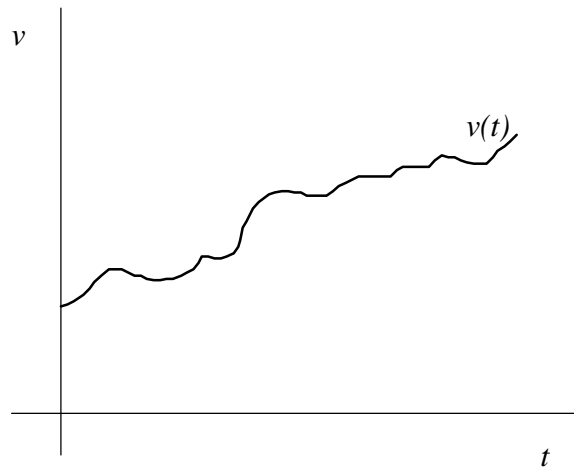


図10.1 速度と時間の関係

時間加速度は、例えば、この図10.1の曲線上の各点（その時刻に対応する）の傾きである。この傾きという意味は、山の傾斜ということと同じことであり、傾斜が急であれば、時間加速度は大きいし、傾斜が緩やかであれば、時間加速度は小さいことを示す。

すなわち、この図10.1で表される曲線を $v(t)$ と書けば、その時間加速度 a は、

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \quad (10.1)$$

で与えられる。この時間加速度の量は、特定の時刻においては、いかなる物体の運動においても直線として表現することができる。物体がどのような複雑な運動をしていても、瞬間的には、物体の運動方向は、直線であると見なすことができ、その運動は加速するか減速するか、変わらないかであり、その変化を時間加速度の傾きの量として表現することができる。すなわち、特定の時刻における時間加速度は、極小時間変化 dt と 運動方向にとった極小速度変化 dv の一次関数として表現することができる(図10.2)。

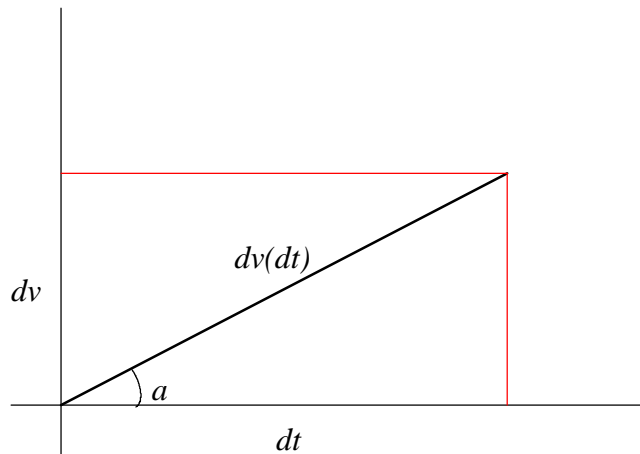


図10.2 極少速度変化と極少時間変化の関係と時間加速度

10.2 空間微分による加速度の測定

加速度の測定方法は、10.1 で述べた方法だけではない。10.1では、時間に対する速度の変化を考えたが、空間に対する速度の変化も考えることができる。例えば、直線上を運動する自動車の速度は、10m 離れた場所の速度や、20m 離れた場所の速度を測定することができ、空間（距離）に対する速度の変化を考えることができる。

このような変化をグラフで表現すれば、例えば、図10.3のように表現することができる。

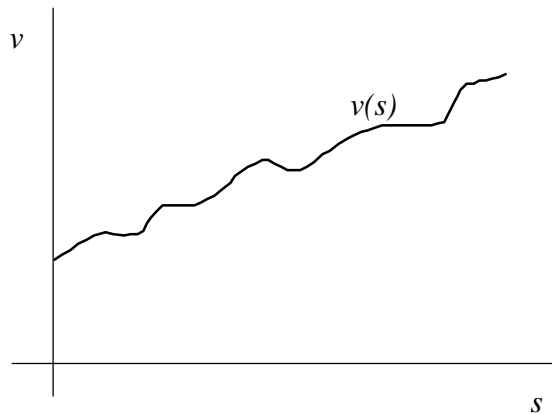


図10.3 速度と距離の関係

10.3 時間微分による加速度と空間微分による加速度の関係

同じ運動を図10.1の形式で表現した場合と図10.3の形式で表現した場合の両者の関係はどうなっているのでしょうか。等加速度運動の場合を具体的な数値を与えて図に書いてみることにしよう。図10.4の右図は、左図のグラフを書いた後に、 $v = v(t)$ のグラフと v 軸との囲む領域の面積を測れば幾何学的に v と s の関係を得ることができる。勿論、運動する物体の速度と距離を直接測定することによっても得られる。

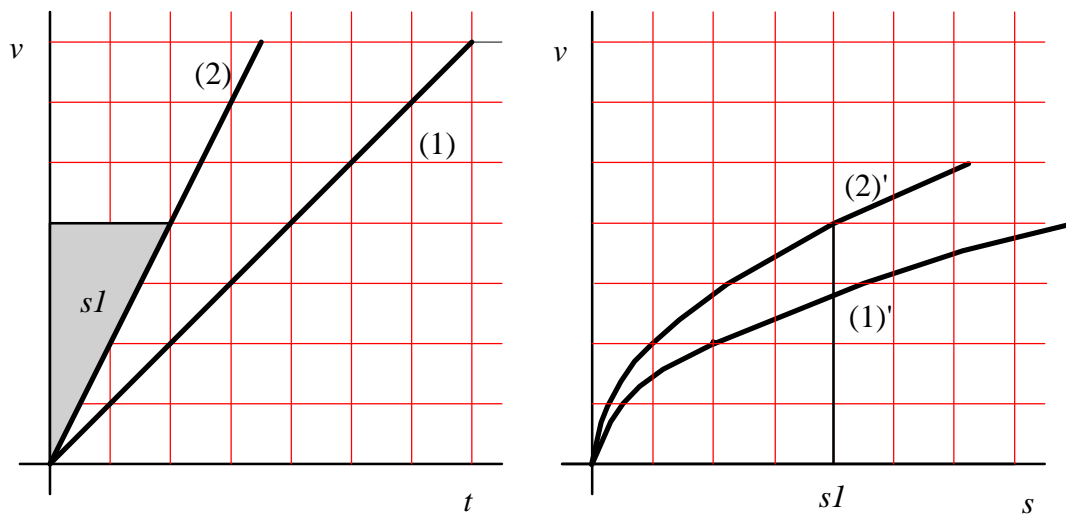


図10.4 同一の運動の異なる測定によるグラフ

$$(1) \quad v = t \quad (1)' \quad s = \frac{1}{2}v^2$$

$$(2) \quad v = 2t \quad (2)' \quad s = \frac{1}{4}v^2$$

等時間加速度 a で運動する場合は、初速度をゼロとすれば、一般に、

$$v = at \tag{10.2}$$

と書くことができ、(1)の場合 $a=1$ 、(2)の場合 $a=2$ である。この a を用いて、距離と速度の関係を表現すると、

$$s = \frac{1}{2a}v^2 \tag{10.3}$$

と書くことができ、この式を書き換えると、

$$\frac{1}{2}v^2 = as \tag{10.4}$$

と書くことができる。式(10.2)と式(10.4)のグラフを書けば、図10.5のようになる。

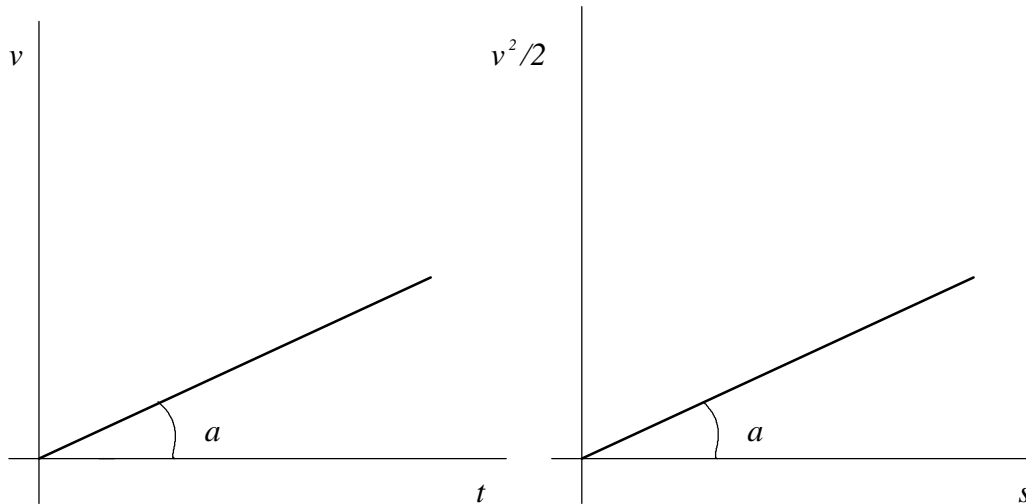


図 10.5 等加速度運動の2つの表現

式(10.2)と式(10.4)から a を除けば、

$$\frac{\frac{1}{2}v^2}{s} = \frac{v}{t} \quad (10.5)$$

という関係が等加速度運動の場合成り立つ。

一方、一般の加速度が変化する運動の極少時間加速度は図10.2で表すことができ、極少時間においては加速度の変化は一定であると見なすことができた。同様に極少距離 ds とその間の極少速度変化 $d(\frac{1}{2}v^2)$ は比例すると見なせるから、 $d(\frac{1}{2}v^2)$ と ds の関係をグラフで書けば、図10.6のように書くことができる。

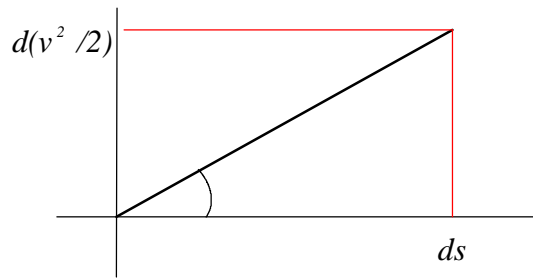


図 10.6 空間における極少加速度のグラフ

すなわち、

$$\alpha = \frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} \quad (10.6)$$

である。図10.2、図10.5、図10.6の対応から、 $a = a$ であり、

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} = \frac{dv}{dt} \quad (10.7)$$

と書くことができる。この式の左辺を位置加速度と呼ぶことにすれば、位置加速度と時間加速度は等しい。このことは同じ現象を2つの異なる方法を用いて観測したわけであるから、得られる加速度が等しいのは当然であるとも言える。

この式の形式はこれ自体正しいが、数学者に言わせれば、この形式は正しくないと言主張するかもしれない。彼らは、

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}v^2)}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

と書くべきである、というだろう。この変な記号 ∂ の意味については後に述べることにし、しばらくは式(10.7)の形式で話を進めることにしよう。

式(10.7)の両辺に質量 m をかければ、

$$m \frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} = m \frac{dv}{dt} \quad (10.8)$$

と書くことができる。ニュートンの運動の第二法則は $F = m \frac{dv}{dt}$ であるから、式(10.8)は、

$$F = m \frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} \quad (10.9)$$

と書くことができる。この式がニュートンの運動の第二法則と等価な力の表現である。このように表現するメリットは加速度という量を空間上の位置の関数として定義できる点にあり、このことは時間加速度にはない特徴である。すなわち、静止している物体に加えられている加速度を論じることができる。

よく知られた重力加速度 g という量は、空間的な位置に依存する関数であるから、位置加速度の一種であると考えられ、式(10.8)により、何故、 $mg = ma$ と置くことができるのかという疑問に答えることができる。

10.4 代数的導出

式(10.7)は代数的に導くこともできる。全く意味のないような次の方程式

$$\int v dv = \int v dv$$

を変形すれば導くことができる。 $v = \frac{ds}{dt}$ とおけるから、

$$\int v dv = \int \frac{ds}{dt} dv$$

すなわち、

$$\frac{\int v dv}{ds} = \frac{dv}{dt}$$

$\int v dv = \frac{1}{2}v^2$ だから、

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} = \frac{dv}{dt}$$

よって、式(10.7)が得られた。数学とは便利なものである。今までこんなに苦労して考えたことが、ものの1分もしない内に求める答えが得られた。しかしながら、その幾何学的な意味を考えることは無意味ではないので、グラフをたくさん書いたことも無意味ではないだろう。

10.5 位置の関数としての速度

式(10.6)を書き換えると、

$$a = \frac{du}{ds} \tag{10.10}$$

$$\text{ただし、 } u = \frac{1}{2}v^2$$

と書くことができる。この u は位置の関数としての速度的な量であり、位置速度とよぶことにしよう。式(10.10)から、ただちに、

$$u = \int a ds \tag{10.11}$$

と書くことができる。位置速度を空間微分したものが位置加速度であるから、位置加速度を空間積分したものは位置速度であるのは当然である。

10.6 三次元での表現

いままでは一次元の運動について考えてきたが、この考えは三次元空間においても、当然表現することができる。ただ、方程式を三つ書けばよいだけである。三次元空間における運動を各方向から観測した位置加速度は、

$$a_x = \frac{du_x}{dx} \quad (10.12)$$

$$a_y = \frac{du_y}{dy}$$

$$a_z = \frac{du_z}{dz}$$

ただし、 $u = f(u_x, u_y, u_z)$

である。三次元の位置加速度 \mathbf{a} は、

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (10.13)$$

ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトル

であるから、式(10.12)を代入して、

$$\mathbf{a} = \frac{du_x}{dx} \mathbf{i} + \frac{du_y}{dy} \mathbf{j} + \frac{du_z}{dz} \mathbf{k} \quad (10.14)$$

である。数学者は、このような計算を、

$$\mathbf{a} = \frac{du_x}{dx} \mathbf{i} + \frac{du_y}{dy} \mathbf{j} + \frac{du_z}{dz} \mathbf{k} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \quad (10.15)$$

と定義した。このような計算を数学では偏微分という。式(10.15)は、

$$\mathbf{a} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \text{grad } u \quad (10.16)$$

と書かれることもある。

この記法を用いて、式(10.7)を三次元に拡張すれば、

$$\text{grad } u = \frac{dv}{dt} \quad (10.17)$$

と書くことができ、式(10.8)は、

$$m \text{ grad } u = m \frac{dv}{dt} \quad (10.18)$$

と書くことができる。数学者の気に入るように書けば、

$$\text{grad } u = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (10.19)$$

$$m \text{ grad } u = m \frac{\partial v}{\partial t} \quad (10.20)$$

ということになる。

10.7 常微分と偏微分の違い

数学では、1変数による微分方程式を常微分方程式といい、例えば、

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (10.21)$$

のように書く。2変数以上の微分方程式は偏微分方程式といい、例えば、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{a} \quad (10.22)$$

のように書く。微分の記号は1変数の場合は d で、2変数以上の場合は ∂ である。どうしてこのような区別が必要なのか。

考えられる理由の一つは、記号を d の代わりに ∂ を用いることによって、その微分方程式が2変数以上の微分方程式であるとすぐに判別することができるということなのかもしれないが、式(10.22)を、

$$\frac{du}{dx} \mathbf{i} + \frac{du}{dy} \mathbf{j} + \frac{du}{dz} \mathbf{k} = \mathbf{a}$$

と書いてみると、 dx, dy, dz があり、3変数の微分方程式であることは、 ∂ など使わなくてもわかる。

また、この記号の違いは、1変数の微分と2変数以上の微分が根本的に違っており、そのことを示す必要があるから、必要なのであると考えることもできる。確かに、1変数の微分と2変数の微分は違うが、2変数の微分と3変数の微分も違う。もし、1変数の微分と2変数の微分の違いを示す必要があるなら、2変数の微分と3変数の微分も違いを示す必要があり、例えば、2変数の微分の記号が ∂ で、3変数の微分の記号は δ などとするべきである。このようなことがなされていないことから、基本的に2変数の微分と3変数の微分に違いがないから、同じ記号 ∂ が使えるのであろう。それに対して、1変数の微分と2変数以上の微分では使う記号が異なるということはいったいどう解釈すればよいのか。1変数の微分というのは2変数以上の微分の特別な場合であり、集合的な表現を使えば、1変数の微分は2変数以上の微分に含まれる。実際、式(10.22)で表される運動が、直線的である場合、任意にとった x, y, z 座標軸のそれぞれに対して斜めに動く場合は、 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ はゼロではないが、運動

が z 軸と平行になるように座標系を設定すれば、 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ はゼロになり、式(10.22)は、

$$0 + 0 + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = a$$

になる。このように書くことは数学的に正しいが、数学者の規約によれば、この方程式は1変数の微分方程式であるから、偏微分の記号を使うことは間違っており、

$$\frac{du}{dz} \mathbf{k} = a$$

と書かねばならないことになる。このような無意味な複雑さは、いたずらに数式の解釈を困難にするだけで、数学の世界から排除すべきである。微分の記号は d か ∂ のどちらか一方にするべきである。基本的に微分の記号は d であるから、この記号を使うべきである。昔は、この記号に統一されていたようであるが、どこの誰が最初に言い出したかは知らないが、この人の浅はかな思いつきと物事を複雑にすることに喜びを感じるその当時の数学者によって、変な記号 ∂ が数学の世界に導入されてしまったようである。数学者は時々このような変な規約を導入する。

例えば、分数($13\frac{2}{3} \neq 13 \times \frac{2}{3}, 13\frac{2}{3} = 13 + \frac{2}{3}$)や括弧("(", "{", "["など)の使い方の規約もそうである。

現代では1変数の微分方程式では微分の記号は d を使い、2変数以上の微分方程式では微分の記号は ∂ を使うことになってしまった。この愚かな慣習にわれわれがしたがわなければならないということはないが、この慣習にしたがっている物理学の知識との親和性を考慮し、まったく不本意ながら、この慣習にしたがうことにしよう。以後に述べる数式の変換において、微分の記号が、 d から ∂ に換

わったり、 ∂ から d に換わったとしても驚かないでいただきたい。例えば、式(10.7)を

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} = \frac{dv}{dt}$$

のようにわれわれが書いたとしてもこの記法が間違っていると判断してもらいたくないし、このような式を書いた後に、すなわち、

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}v^2)}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

である、といったように書いたとしてもわれわれを魔法使いであると思ってもらいたくない。

微分の記号として、 d を使うか ∂ を使うかの判断はその方程式が、1変数の微分方程式であれば d を使い、2変数以上であれば ∂ を使うというだけである。これはただの慣習であり、数学的な意味はまったくない。1変数の微分方程式で ∂ を使ってもよいし、2変数の微分方程式で d を使っても間違っていない。

10.8 位置加速度とハミルトンの原理

ハミルトンの原理や最小作用の原理といった、やや程度の高い知識を持っている人は、式(10.10)のような結果を最初に得たのはハミルトンであると主張するかもしれない。ここではハミルトンの原理などについて述べるつもりはないが、ハミルトンの原理などの考えには、運動エネルギーや位置エネルギーという概念が必要であり、われわれの位置加速度の概念より、ずいぶん複雑な考えを用いているものである。われわれの位置加速度の概念は、純粹に加速度の概念を考察することによって得られたものであるから、運動エネルギーとか位置エネルギーなどとは基本的にまったく関係ないもの

であり、ハミルトンなどの考えより、より基本的な概念であると言える。

