第６章　ベクトル

この章ではベクトルの基本的な定義について述べることにしよう。内容は数学的なもので、新しいものはまったくないから、ベクトルについてよく知っている人はこの章を読む必要はない。ただし、本章で扱うベクトルの商の概念は、一般的なベクトルの教科書には載っていないことが多いから、この概念を知らない人も多いだろう。このような人はこの章を読んでおく必要がある。

6.1 スカラーとベクトル

物理学で扱われる量には、長さや時間や温度のように大きさのみで表される量と速度や力などのように、大きさと方向を持つ量がある。前者をスカラー量あるいは単にスカラーといい、後者をベクトル量あるいはベクトルという。

6.2 ベクトルの表現

ベクトルの図的な表現は矢印で表すことができる。矢印の長さはそのベクトルの大きさで、矢印の向きはそのベクトルの方向である。

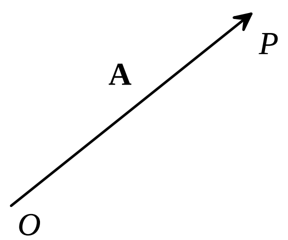

図6.1 ベクトルの図的表現

図6.1のように、点Oから点Pに向かって一つのベクトルがあるとき、点Oを始点、点Pを終点といい、代数的には、$\overrightarrow{OP}$と書く。ある

いはこのベクトルの名前をAと名付ければ、$\vec{A}$、$\bar{A}$、$\boldsymbol{A}$ などとも書かれる。この本では$\boldsymbol{A}$のように太字で書くことにする。

6.3 ベクトルの合成

図6.2のように、１点Oに２つのベクトル$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$が同時に作用しているとき、その合成がベクトル$\boldsymbol{C}$で表されるとき、

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{6.1}$$

と書く。このようにして合成することを平行四辺形の法則、あるいは三角形の法則という。

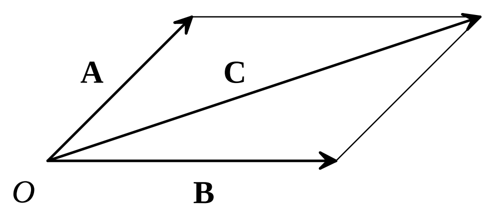

図6.2 ベクトルの合成

この数学を物理学に適用するときには実験してみる必要がある。$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$が力であるとすれば、その合力が$\boldsymbol{C}$になるかどうかは、実験してみなければわからないことである。逆に言えば、方向を持っている量で、その合成が平行四辺形の法則にしたがうものがベクトルであるということになる。

物理学には重ね合わせの原理というものがあるが、このように合成できる量というものは重ね合わせ可能な量であるということができる。

ベクトルには大きさと方向があるが、大きさが同じで、その方向が反対のベクトルには負号を付けて表す。すなわち、ベクトル$\boldsymbol{A}$の反対方向のベクトルを$-\boldsymbol{A}$で表す。この合成は、

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O} \tag{6.2}$$

となる。$\boldsymbol{O}$は大きさ零の形式的なベクトルで零ベクトルとよばれている。

6.4 ベクトルとスカラーの積

ベクトル$\boldsymbol{A}$とベクトル$\boldsymbol{A}$を平行四辺形の法則に従い合成すれば、そのベクトルは$\boldsymbol{A}$と同じ方向で、大きさはその２倍になる。このことを代数的に書けば、

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A} \tag{6.3}$$

となる。一般にスカラーnとベクトル$\boldsymbol{A}$の積は、$n\boldsymbol{A}$と書かれ、$n\boldsymbol{A}$は$\boldsymbol{A}$と方向が同じで、大きさは$\boldsymbol{A}$のn倍である。

一般にベクトル$\boldsymbol{A}$は、ベクトル$\boldsymbol{A}$と方向が同じで単位の長さを持つベクトル$\boldsymbol{s}$のn倍であると考えることができるから、

$$\boldsymbol{A}=n\boldsymbol{s} \tag{6.4}$$

と書くことができる。単位の長さを持つベクトルは単位ベクトルという。この場合のnはベクトル$\boldsymbol{A}$の大きさに等しいから、ベクトル$\boldsymbol{A}$の大きさを$|\boldsymbol{A}|$あるいはAと書き、書き換えれば、

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{s}=A\boldsymbol{s} \tag{6.5}$$

と書くことができる。

6.5 ベクトルの解析的表現

図6.3のように二次元の座標上に表現されるベクトル$\boldsymbol{B}$は

$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} \tag{6.6}$$

$$B_x = B\cos(B, x)$$

$$B_y = B\cos(B, y)$$

ただし、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$はそれぞれ$x, y$方向の単位の長さを持つベクトル

と書くことができる。B_xはベクトル$\boldsymbol{B}$のx方向の成分という。ベクトル$\boldsymbol{B}$は$B_x\boldsymbol{i}, B_y\boldsymbol{j}$を平行四辺形の法則にしたがって合成したものであると見なすことができる。ベクトル$\boldsymbol{B}$の大きさは、

$$|\boldsymbol{B}| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \tag{6.7}$$

となる。

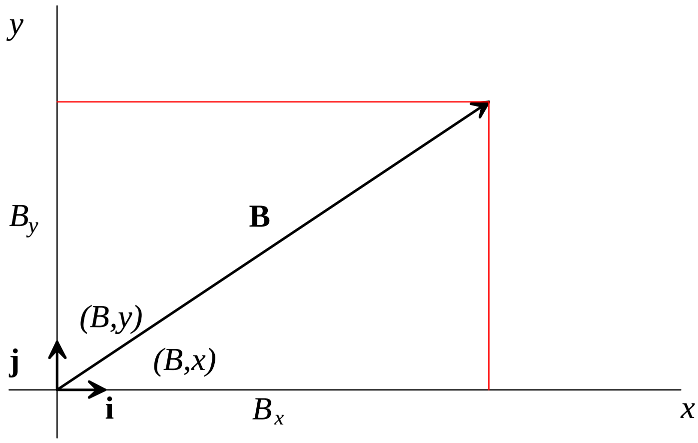

図6.3 二次元座標上のベクトル

三次元上の一般のベクトル$\boldsymbol{A}$では、

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{6.8}$$

$$A_x = A\cos(A,x)$$

$$A_y = A\cos(A,y)$$

$$A_z = A\cos(A,z)$$

ただし、$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$はそれぞれ$x,y,z$方向の単位の長さを持つ
ベクトル　A_x, A_y, A_zはそれぞれx,y,z方向の大きさ

と書くことができる。$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$は単位ベクトルあるいは基本ベクトルとよばれる。また、式(6.5)より、

$$A\boldsymbol{s} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{6.9}$$

ただし、$\boldsymbol{s}$は$\boldsymbol{A}$方向の単位ベクトル

と書くこともできる。$\boldsymbol{A}$ は３つの方向のベクトル$A_x\boldsymbol{i}, A_y\boldsymbol{j}, A_z\boldsymbol{k}$ を平行四辺形の法則にしたがって合成したものであると見なすことができるから、ベクトル$\boldsymbol{A}$ の大きさは、

$$|\boldsymbol{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{6.10}$$

である。

6.6 位置ベクトル

一般のベクトルは式(6.8)のように表現することができるが、ベクトルの始点を座標原点にとることに約束したベクトル$\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = r_x\boldsymbol{i} + r_y\boldsymbol{j} + r_z\boldsymbol{k} \tag{6.11}$$

を考えると、その終点の座標は、(r_x, r_y, r_z) となっていることがわかる。このことを利用すれば、物体の位置を示す座標(x, y, z) の代わりに、その物体の位置は$\boldsymbol{r}$ であると表現することが可能である。このようなベクトル$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルとよばれている。

6.7 ベクトルの解析的な加法、減法、スカラーとの積

ベクトルの加法、減法は、式(6.8)を用いて、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) + (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\ &= (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) - (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\ &= (A_x - B_x)\boldsymbol{i} + (A_y - B_y)\boldsymbol{j} + (A_z - B_z)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6.13}$$

となる。このようにして、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\ldots$ といった計算はいくらでも続けることができる。

　スカラーとベクトルの積は、

$$n\boldsymbol{A}=n(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=nA_x\boldsymbol{i}+nA_y\boldsymbol{j}+nA_z\boldsymbol{k} \qquad (6.14)$$

となる。

6.8 ベクトルの内積

　２つのベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$の大きさと、そのなす角の余弦との積、

$$AB\cos(A,B)$$

を$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の内積あるいはスカラー積といい、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

と書く。この記法を用いると、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos(A,B) \qquad (6.15)$$

と書くことができる。内積$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$の値はスカラーである。その幾何学的な意味は、一方のベクトルの大きさともう一方のベクトルの前者の方向に対する成分との積である。例えば、図6.4では、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=OP\times OQ$$

である。

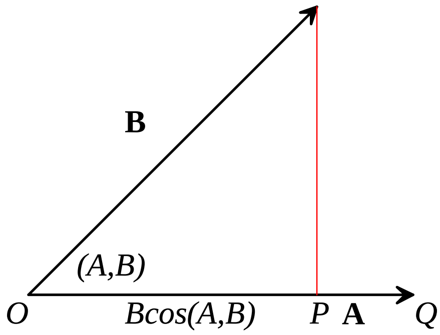

図6.4 ベクトルの内積

ベクトルの内積には、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \quad \text{（交換の法則）} \tag{6.16}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \quad \text{（分配の法則）} \tag{6.17}$$

が成り立つ。また、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=AA\cos 0=A^2 \tag{6.18}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ は$\boldsymbol{A}^2$ と書かれることもある。$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$が垂直ならば、$\cos\frac{\pi}{2}=0$だから、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{6.19}$$

となる。基本ベクトルに対しては、大きさが１であるから、

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1 \tag{6.20}$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{6.21}$$

が成り立つ。

一般のベクトルの解析的な表現、式(6.8)は、$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$であるが、一般に任意のベクトル$\boldsymbol{A}$と任意の方向の単位ベクトル$\boldsymbol{u}$の内積$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}$は、ベクトル$\boldsymbol{A}$の$\boldsymbol{u}$方向の成分であるから、ベクトル$\boldsymbol{A}$の$x$成分$A_x$は、

$$A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i} \tag{6.22}$$

と書くことができる。この記法を用いれば、式(6.8)は、

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \tag{6.23}$$

と書くこともできる。

$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の内積は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\
&= A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} \\
&\qquad + A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} \\
&\qquad + A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{6.24}$$

である。式(6.22)の形式を用いれば、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k}) \tag{6.25}$$

と書くこともできる。

6.9 ベクトルの外積

２つのベクトル$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$において、その大きさは$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$を二辺とする平行四辺形の面積に等しく、その方向はこの平行四辺形の面に垂直で、$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$へ右ねじを回すときのねじの進む向きにとったベクトルを$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$の外積あるいはベクトル積といい、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{6.26}$$

と書く。ただし、$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$への回り方は２通りあるが、回る角度は小さい方とする。ベクトルの外積$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$という量はベクトルである。

定義から、$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$の大きさは、

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB \sin(A, B) \tag{6.27}$$

である。

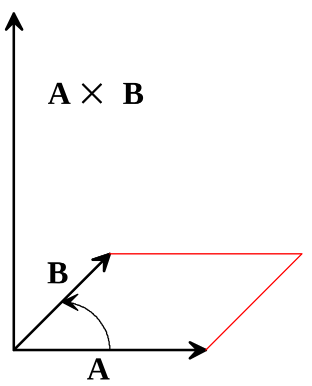

図6.5 ベクトルの外積

ベクトルの外積には、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{6.28}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{6.29}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \tag{6.30}$$

が成り立つ。また、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0 \qquad \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{が平行な場合} \tag{6.31}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0 \tag{6.32}$$

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB \qquad \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{が垂直な場合} \tag{6.33}$$

も成り立つ。基本ベクトルに対しては、

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0 \tag{6.34}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \tag{6.35}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}) \\ &=A_xB_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+A_xB_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+A_xB_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\ &\quad+A_yB_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+A_yB_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+A_yB_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} \\ &\quad+A_zB_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+A_zB_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+A_zB_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6.36}$$

である。

　二つのベクトルの外積は、それらを二辺とする平行四辺形の面積に、法線の方向を与えたものである。一般にベクトルの大きさを平面図形の面積とし、その平面の法線の方向を与えたベクトルを考えることができる。このようなベクトルを面積ベクトルという。ベクトルの外積はこの面積ベクトルの一種であるということができる。

6.10 三つのベクトルの積

三つのベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$の積というものを考える。このような計算にはベクトルの内積はスカラーで、外積はベクトルであるということを常に考える必要がある。例えば、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$はベクトル$\boldsymbol{A}$とスカラー$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$の積であるから考えることができるが、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$はベクトル$\boldsymbol{A}$とベクトル$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$の積であることになるが、ベクトルとベクトルの積というものは定義されていないから、考えることができない。

三つのベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$の積はそれぞれのベクトルを$\boldsymbol{A}(A_x,A_y,A_z)$，$\boldsymbol{B}(B_x,B_y,B_z)$，$\boldsymbol{C}(C_x,C_y,C_z)$とおき、定義にしたがって計算してみればよい。このような計算の結果を以下に挙げておく。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{6.37}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{6.38}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{6.39}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{6.40}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} \tag{6.41}$$

6.11 ベクトルの商

三つのベクトルの積の計算を応用すれば、ベクトルの商を考えることができる。一般にこの商は１つに決まらないが、このことは無意味なことではない。例えば、一般に関数を積分すると結果は一つに決まらないが、積分することに意味がないと言う人はいないであろう。

(1) 内積の商

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=k \quad (\boldsymbol{A}\neq 0) \tag{6.42}$$

を満足するベクトル$\boldsymbol{X}$は、

$$\boldsymbol{X}=\frac{k\boldsymbol{A}}{A^2}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A} \tag{6.43}$$

ただし、$\boldsymbol{C}$ は任意のベクトル

である。

【証明】

$$\boldsymbol{A}\cdot(\frac{k\boldsymbol{A}}{A^2}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=k$$

$$\frac{k}{A^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=k$$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=0$だから、

$$\frac{k}{A^2}\boldsymbol{A}^2+0=k$$

よって、$\boldsymbol{X}=\frac{k\boldsymbol{A}}{A^2}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}$である。

(2) 外積の商

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \quad (\boldsymbol{A}\neq 0) \tag{6.44}$$

を満足するベクトル$\boldsymbol{X}$が存在するための必要十分条件は、$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$のときで、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$が直交する場合である。このとき$\boldsymbol{X}$は、

$$\boldsymbol{X}=\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}}{A^2}+c\boldsymbol{A} \tag{6.45}$$

ただし、cは任意の定数

である。

【証明】

$$\boldsymbol{A}\times\left(\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}^2}+c\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}$$

$$\frac{\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{A}^2}+c\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ であり、条件 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ より、

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}$、また、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$ だから、

$$\frac{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}^2}+0=\boldsymbol{B}$$

よって、$\boldsymbol{X}=\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}^2}+c\boldsymbol{A}$ である。

この結果は後に磁場について考えるときに使う。